

## Interrogation rapide n° 4

1 heure

### I Questions de cours

1. Donner la définition d'un nombre premier.
2. Donner la propriété qui permet d'en déduire le test de primalité.
3. Démontrer le sens :  $p \mid \prod_{i=1}^n x_i \Rightarrow (\exists i \in \{1, n\}, p \mid x_i)$  en utilisant un raisonnement par l'absurde.

### II Exercices

#### Exercice 1

1. Le nombre 401 est-il premier ? (Justifier la réponse en utilisant le test de primalité).
2. Résolvez dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation  $x^2 - y^2 = 401$

#### Exercice 2

Soit  $A$  l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle  $[1 ; 46]$ .

1. On considère l'équation

$$(E) : 23x + 47y = 1$$

où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- (a) Donner une solution particulière  $(x_0, y_0)$  de  $(E)$ .
- (b) Déterminer l'ensemble des couples  $(x, y)$  solutions de  $(E)$ .
- (c) En déduire qu'il existe un unique entier  $x$  appartenant à  $A$  tel que

$$23x \equiv 1 \pmod{47}$$

2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.

- (a) Montrer que si  $ab \equiv 0 \pmod{47}$  alors  $a \equiv 0 \pmod{47}$  ou  $b \equiv 0 \pmod{47}$ .
- (b) En déduire que si  $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$  alors  $a \equiv 1 \pmod{47}$  ou  $a \equiv -1 \pmod{47}$ .

- 3.(a) Montrer que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un entier relatif  $q$  tel que  $p \times q \equiv 1 \pmod{47}$ .

Pour la suite, on admet que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un unique entier, noté  $inv(p)$ , appartenant à  $A$  tel que  $p \times inv(p) \equiv 1 \pmod{47}$ .

Par exemple :

$$inv(1) = 1 \text{ car } 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{47}, \quad inv(2) = 24 \text{ car } 2 \times 24 \equiv 1 \pmod{47},$$

$$inv(3) = 16 \text{ car } 3 \times 16 \equiv 1 \pmod{47}.$$

- (b) Quels sont les entiers  $p$  de  $A$  qui vérifient  $p = inv(p)$  ?
- (c) Montrer que  $46! \equiv -1 \pmod{47}$ .

### BONUS

Soit  $p$  un entier premier. Montrer que si  $p \geq 5$  alors 24 divise  $p^2 - 1$ .